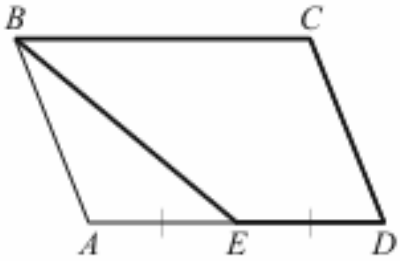
Примерные задания вступительного экзамена по математике для абитуриентов, поступающих на обучение по программам бакалавриата

Часть 1

Ответом к заданиям 1-9 является целое число или конечная десятичная дробь

1 Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 28. Точка E — середина стороны AD. Найдите площадь трапеции $BCDE$.

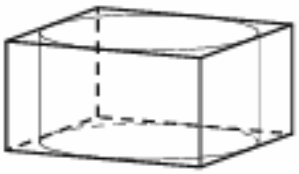


Ответ: _____.

2 Даны векторы $\vec{a}(2;1)$ и $\vec{b}(2;-4)$. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}+\vec{b}$ и $7\vec{a}-\vec{b}$.

Ответ: _____.

3 Цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед. Радиус основания и высота цилиндра равны 2. Найдите объём параллелепипеда.



Ответ: _____.

4 Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Ротор» по очереди играет с командами «Статор», «Стартёр» и «Мотор». Найдите вероятность того, что «Ротор» будет начинать с мячом только вторую игру.

Ответ: _____.

5 Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания каждой лампы в течение года равна 0,5. Лампы перегорают независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа **не перегорит**.

Ответ: _____.

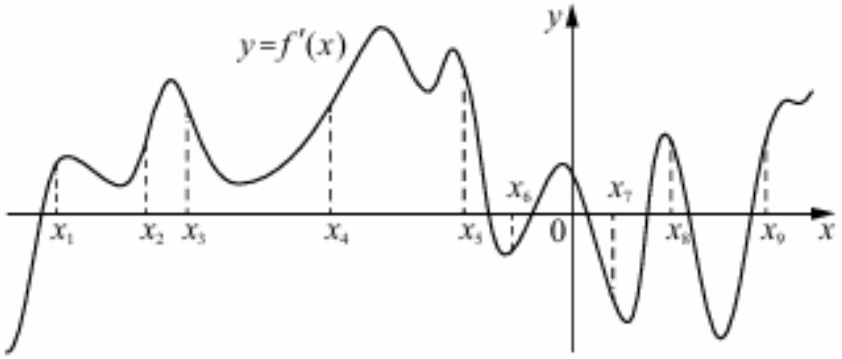
6 Найдите корень уравнения $\log_5(20-x)=2$.

Ответ: _____.

7 Найдите значение выражения $6\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=-0{,}8$.

Ответ: _____.

8 На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечено девять точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам убывания функции $f(x)$?



Ответ: _____.

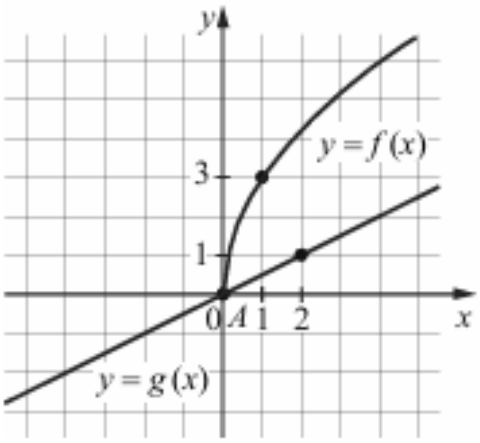
9 Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0=60$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a=32$ км/ч^2. Расстояние (в км) от мотоциклиста до города вычисляется по формуле $S=v_0t+\frac{at^2}{2}$, где t — время (в часах), прошедшее после выезда из города. Определите время, прошедшее после выезда мотоциклиста из города, если известно, что за это время он удалился от города на 154 км. Ответ дайте в минутах.

Ответ: _____.

10 Один мастер может выполнить заказ за 42 часа, а другой — за 21 час. За сколько часов выполнят этот заказ оба мастера, работая вместе?

Ответ: _____.

11 На рисунке изображены графики функций $f(x)=a\sqrt{x}$ и $g(x)=kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ: _____.

12 Найдите точку минимума функции $y=\left(8x^2-40x+40\right)e^{x+4}$.

Ответ: _____.

Часть 2.

13 а) Решите уравнение

$$2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin(2\pi-x)+\sqrt{3}\sin 2x=\sqrt{6}\cos x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известно, что $AB=2$. Плоскость α проходит через вершины A_1 и B и середину M ребра CC_1.

а) Докажите, что сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите высоту призмы, если площадь сечения плоскостью α равна 6.

15 Решите неравенство $7\log_{12}\left(x^2-13x+42\right)\le 8+\log_{12}\frac{(x-7)^7}{x-6}$.

16 Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $\left(0{,}5x^2+2x+6\right)$ млн рублей в год. Если продукцию завода продавать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px-\left(0{,}5x^2+2x+6\right)$. Когда завод будет построен, каждый год фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не больше чем за 3 года?

17 Сумма оснований трапеции равна 13, а её диагонали равны 5 и 12.
а) Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.
б) Найдите высоту трапеции.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^4+(a-3)^2=|x-a+3|+|x+a-3|$$

либо имеет единственное решение, либо не имеет решений.

19 В группе поровну юношей и девушек. Юноши отправляли электронные письма девушкам. Каждый юноша отправил или 5 писем, или 16 писем, причём и тех и других юношей было не меньше двух. Возможно, что какой-то юноша отправил какой-то девушке несколько писем.
а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила ровно 7 писем?
б) Какое наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что все они получили писем поровну?
в) Пусть все девушки получили попарно различное количество писем (возможно, какая-то девушка не получила писем вообще). Каково наибольшее возможное количество девушек в такой группе?